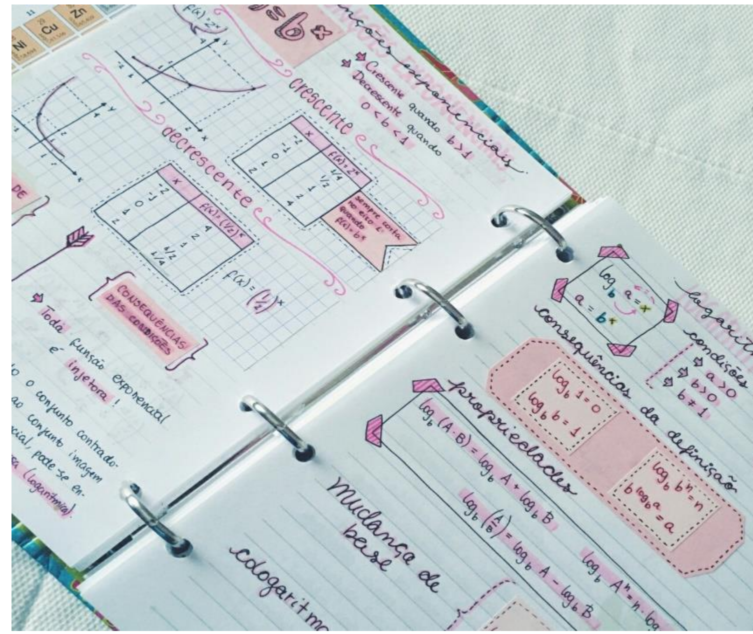
FUNCIONES Y GRÁFICAS

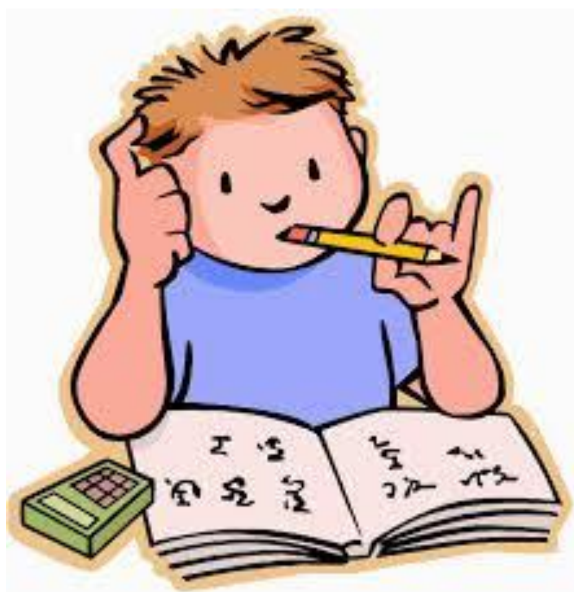
$$f(x)$$

María del Carmen Arroyo Barroso

EVALUACIÓN

- APUNTES: 10%
- ACTIVIDADES: 20%
- EXAMEN: 70%





ESQUEMA DEL TEMA

- FUNCIONES
  - DOMINIO, EXPRESIÓN Y EVALUACIÓN
  - VARIACIONES
    - CRECIMIENTO
    - DECRECIMIENTO
    - MÁXIMO
    - MÍNIMO
  - TENDENCIA
    - FUNCIONES PERIÓDICAS
  - CONTINUIDAD
    - CONTINUA
    - DISCONTINUA

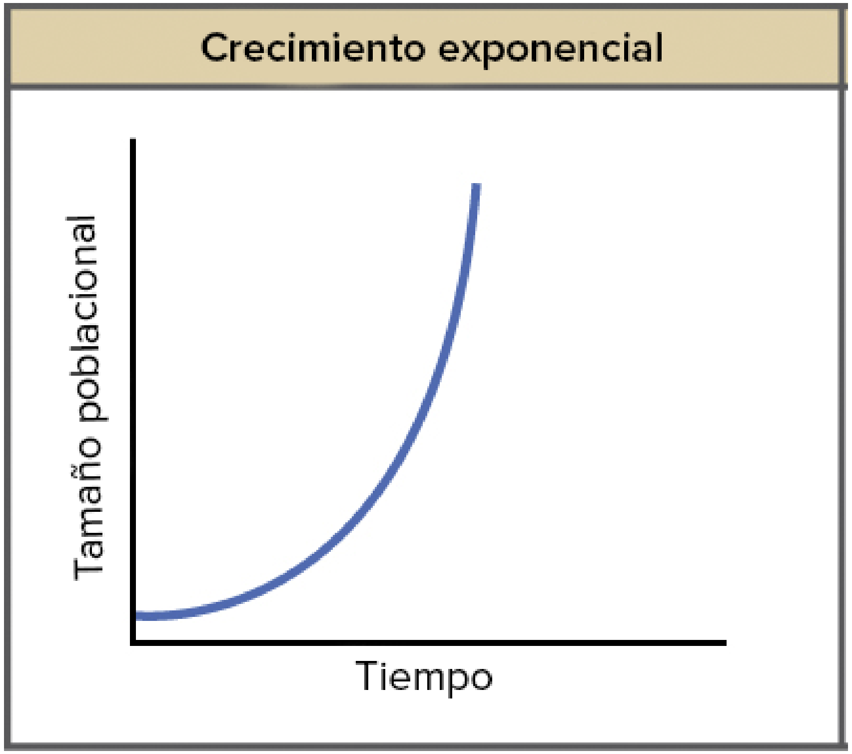
HISTORIA

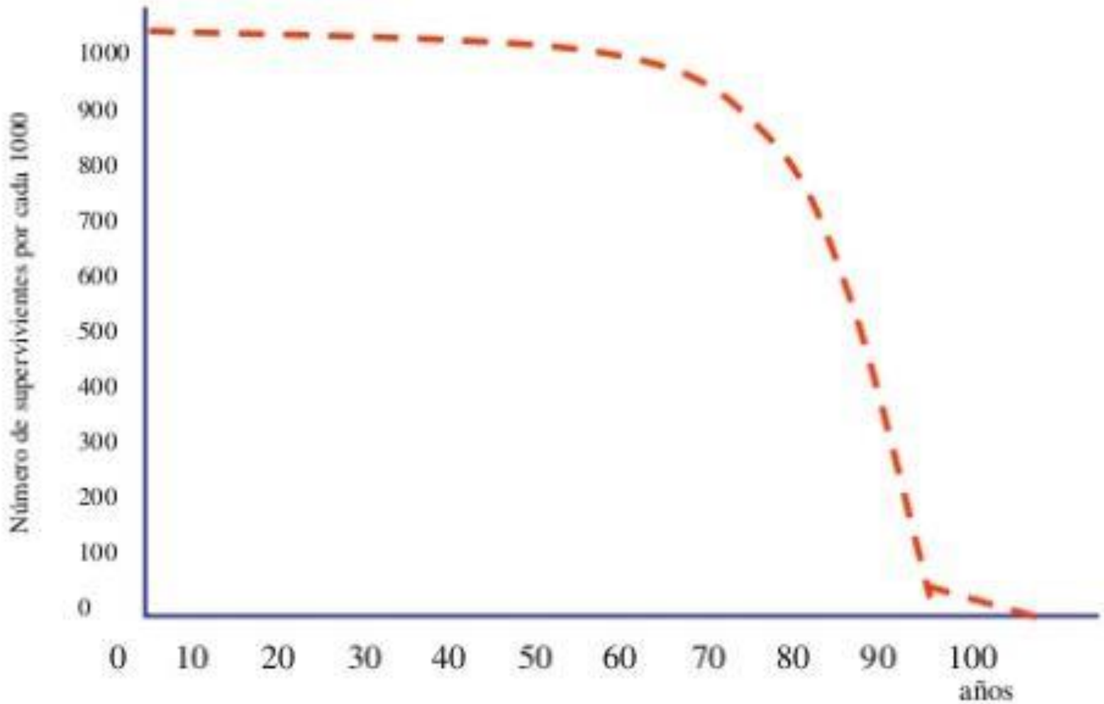
- Origen: Necesidad de explicar fenómenos físicos.

  Medición y cualificación: Finales S. XVI

Galileo investigó sobre las relaciones matemáticas entre 2 variables x e y (Relación cuantitativa entre causa y efecto). Consideró importante medir y valorar causas y efectos, buscando una relación que describiera con sencillez un fenómeno.

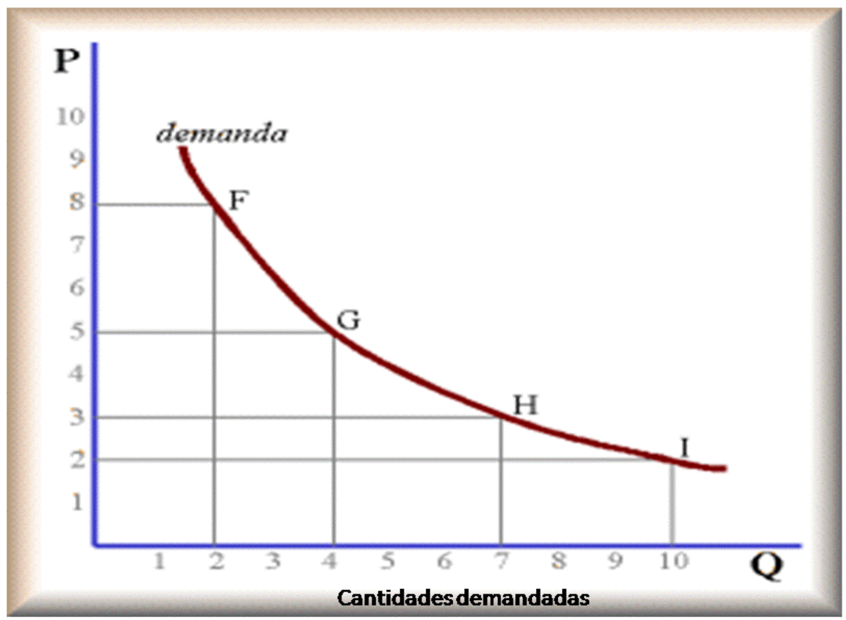
- Aparición: El concepto de función va tomando forma en el S.XVII, quedando definido en el S. VIII con Euler.


Crecimiento exponencial
Tamaño poblacional
Tiempo


Número de supervivientes por cada 1000
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
años


250,00
200,00
150,00
100,00
50,00
0,00
Pm (mm)
Ene
Feb
Mar
Abr
May
Jun
Jul
Ago
Sep
Oct
Nov
Dic
Tiempo (meses)

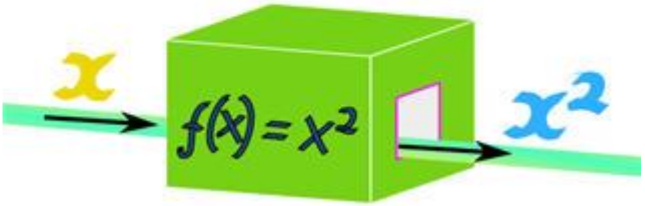

Precio S/. 50
Precio S/. 100
Precio S/. 20
50
50
100
20
20
20


P
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
demanda
F
G
H
I
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Q
Cantidades demandadas

Spam = list (s)

Puedo hacer uso de una función para obtener el número de naranjos que necesito para obtener la producción máxima.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN



Una función relaciona dos variables, X (variable independiente) e y (variable dependiente).

Cada valor de x se corresponde a un único valor de y.

Las funciones las podemos expresar de 4 maneras diferentes:

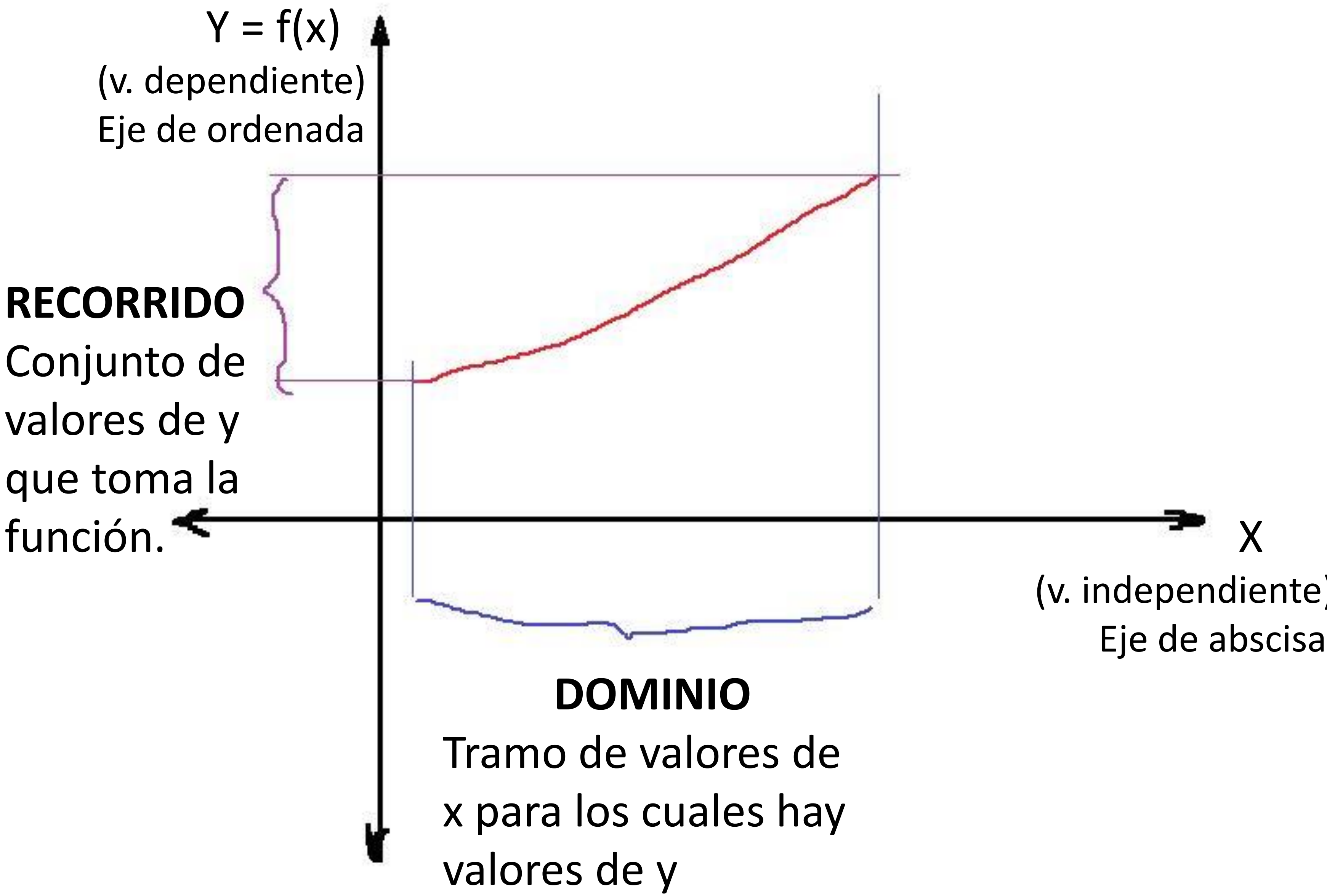
1. Verbal

2. Gráfica

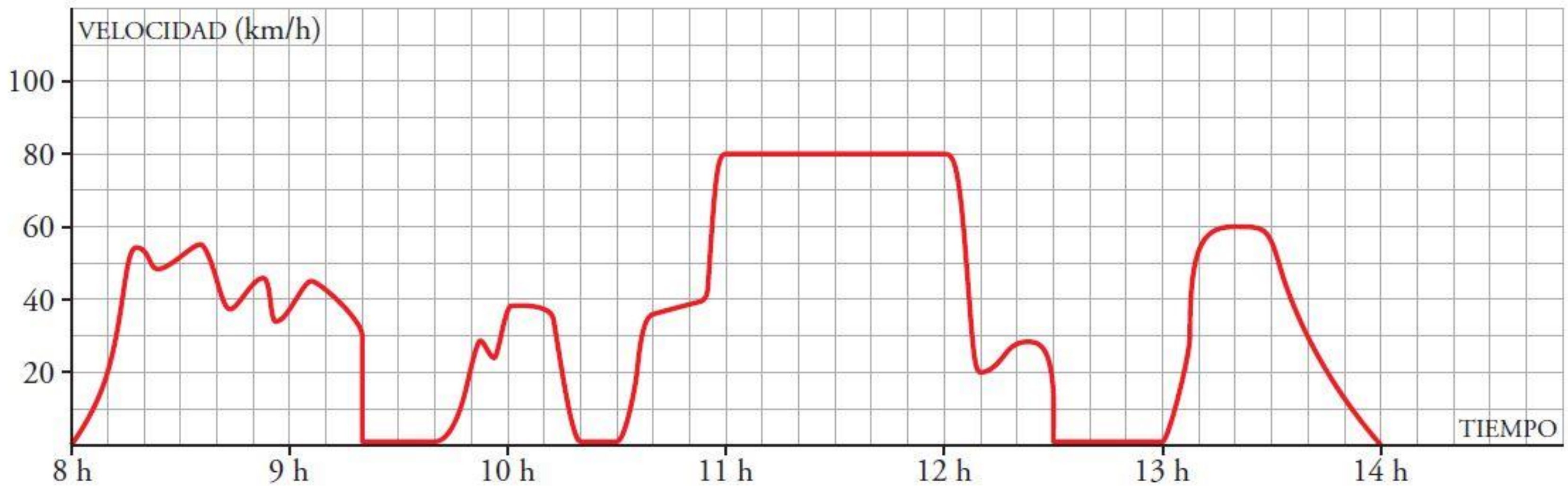
3. Formula o expresión analítica

4. Tabla de valores

EXPRESIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN:



En la siguiente gráfica se ha representado la velocidad de una furgoneta de reparto a lo largo de una mañana de trabajo, que finaliza cuando el conductor para a la hora de comer.



Observa la gráfica y completa.

a) En el eje de abscisas se ha representado Tiempo en horas.

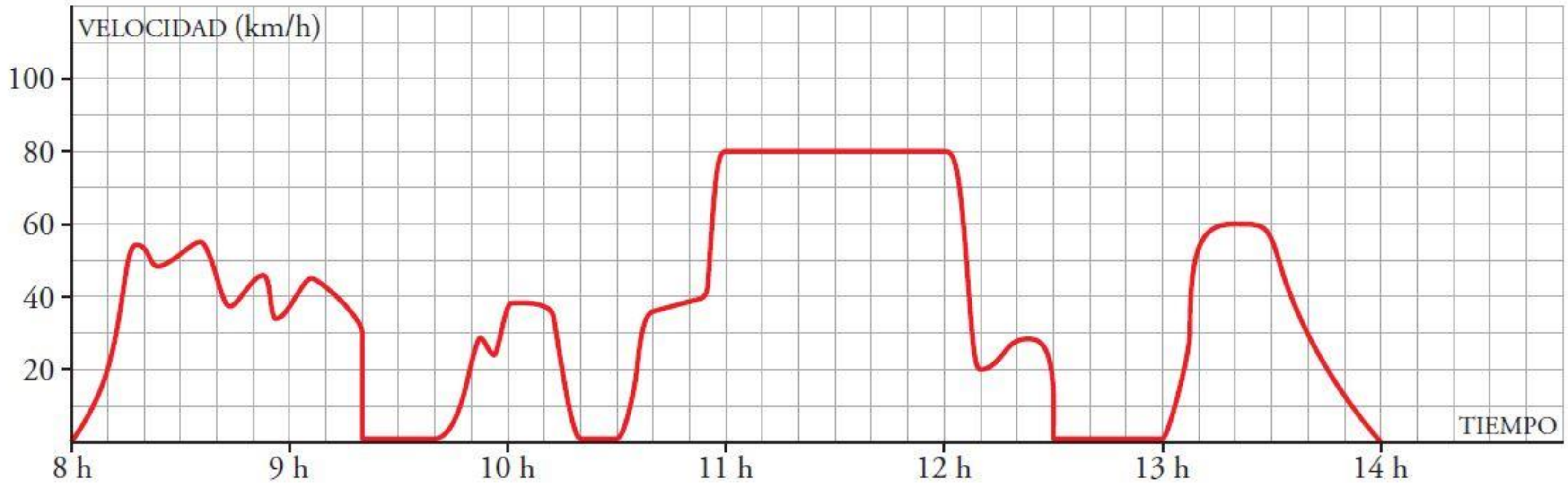
b) En el eje de ordenadas se ha representado Velocidad en Km/h.

c) El dominio de definición es el intervalo $\boxed{8}$ - $\boxed{14}$.

d) La variable independiente es Tiempo.

e) La variable dependiente es Velocidad.

En la siguiente gráfica se ha representado la velocidad de una furgoneta de reparto a lo largo de una mañana de trabajo, que finaliza cuando el conductor para a la hora de comer.



f) ¿Cuántas paradas ha hecho antes de ir a comer? 3

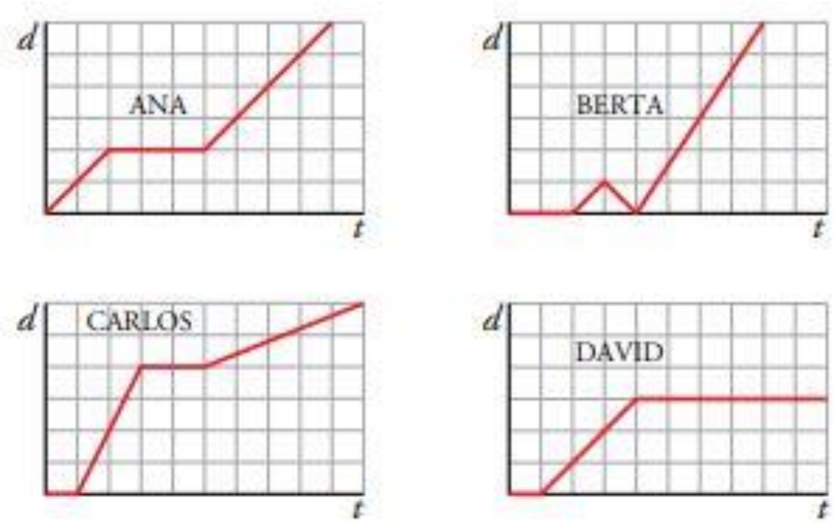
g) ¿A qué hora efectuó la primera parada? 9 h 20 min

h) ¿Cuánto duró la primera parada? 20 min

i) ¿A qué hora entró en la autovía? 11 h 00 min

j) ¿A qué velocidad circuló por la autovía? 80 km/h

3. Cuatro hermanos de una familia van al mismo centro de estudios. Observa la gráfica distancia (d) - tiempo (t) de cada uno:



a) ¿Quién ha salido antes?

b) ¿Quién ha llegado más tarde?

c) Dos de ellos han ido a buscar a sus amigos para ir juntos a clase. ¿Quiénes son?

d) ¿A cuál de ellos se le ha olvidado algo en casa?

e) ¿Cuál no ha ido hoy a clase?

f) ¿Quién ha andado más lento en algún momento?

g) ¿Quién ha ido más rápido?

h) ¿Quién ha estado más tiempo parado?

a) Ha salido antes Ana.

b) Ha llegado más tarde Carlos.

c) Ana y Carlos.

d) Se le ha olvidado algo a Berta.

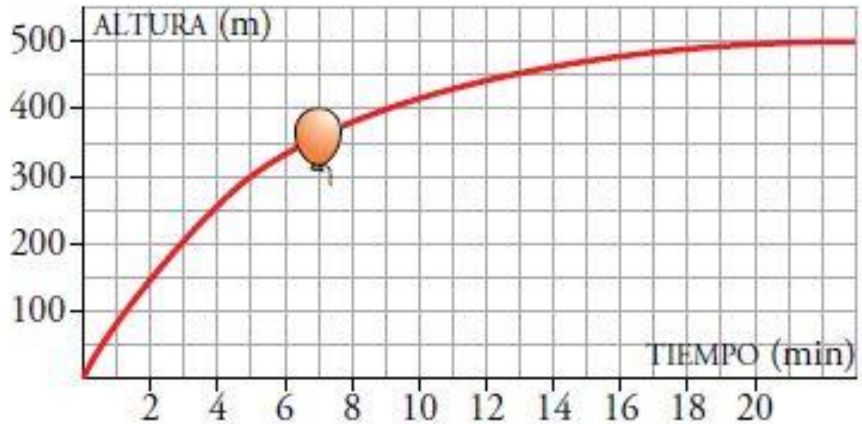
e) No ha ido a clase David.

f) Ha andado más lento Carlos.

g) Berta ha ido más rápido.

h) David.

1. Se suelta un globo que se eleva. La siguiente gráfica representa la altura, con el paso del tiempo, a la que se encuentra el globo:



a) ¿Qué variables intervienen? ¿Qué escala se utiliza para cada variable? ¿Cuál es el dominio de definición de esta función?

b) ¿Qué altura gana el globo entre el minuto 0 y el 5? ¿Y entre el 5 y el 9? ¿En cuál de estos dos intervalos crece más rápidamente la función?

c) ¿A qué altura tiende a estabilizarse?

d) Haz una descripción de la altura a la que se encuentra el globo en el tiempo que dura la observación.

Página 155 del libro
Ejercicio 1, página 146

1. Observa la gráfica del helicóptero y responde:

a) ¿Qué altura lleva cuando va del embalse al incendio?

b) ¿A qué altura estaba a los 20 min? ¿A qué altura baja para coger agua? ¿Y para apagar el fuego?

c) ¿Cuánto tiempo necesita para llenar de agua el depósito? ¿Y para soltarla sobre el fuego?

d) ¿A qué velocidad media (en m/min) sube desde que sale de la base hasta que llega a 320 m de altura?

a) Lleva una altura de 280 m.

b) A los 20 min estaba a 60 m del suelo.

Baja casi a altura 0 para coger el agua.

El helicóptero apaga el fuego a los 20 minutos de salir de la base, a 60 m del suelo.

c) Para llenar el depósito de agua necesita 2 minutos.

Para apagar el fuego necesita 1 minuto.

d) Sube a una velocidad media de $v = \frac{320}{3} = 106{,}7$ m/min.

VARIACIONES, TENDENCIA Y CONTINUIDAD

- VARIACIONES
  - CRECIMIENTO

  Al aumentar x, y aumenta.

  - DECRECIMIENTO

  Al aumentar x, y disminuye.

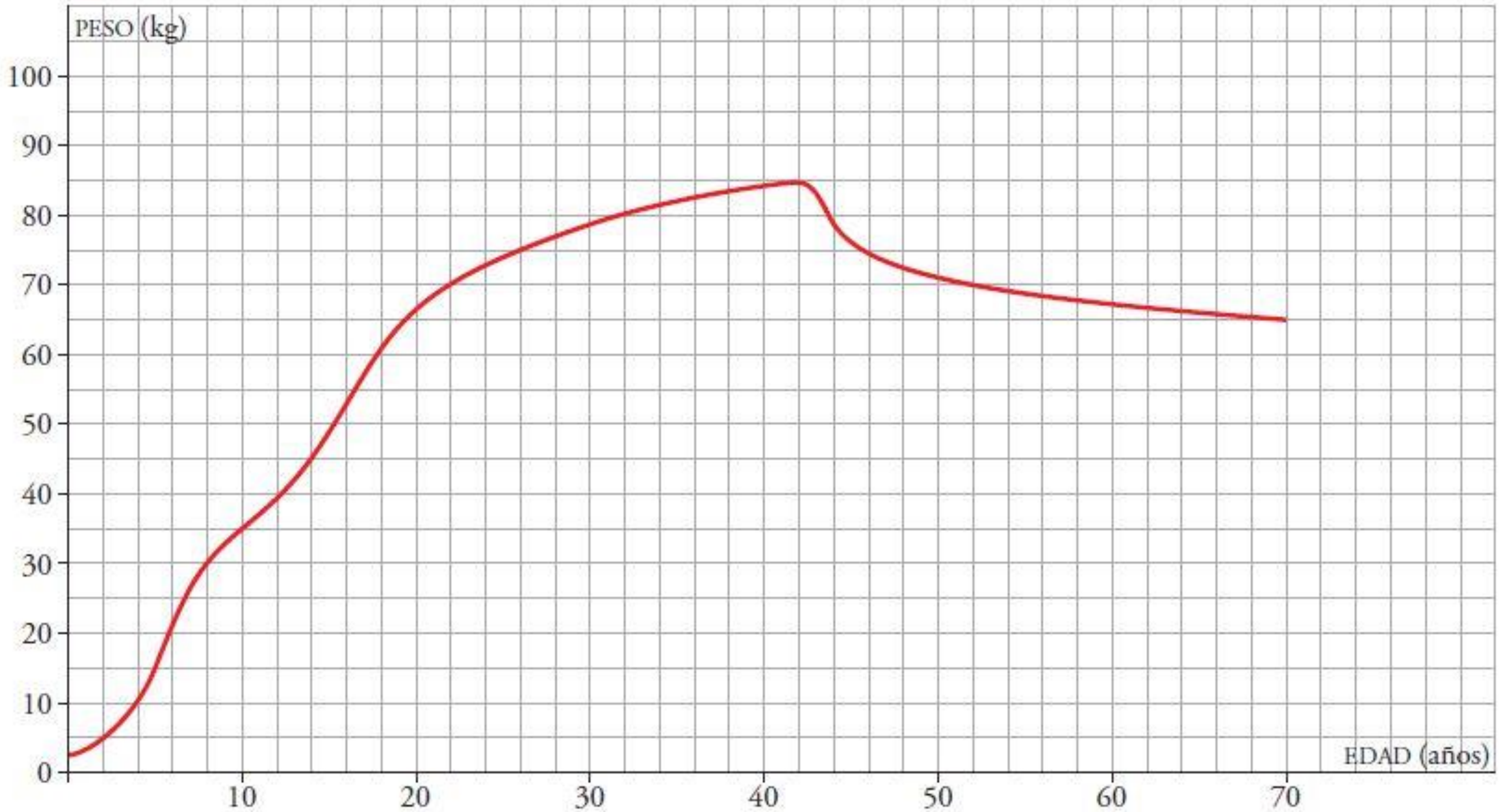
  - MÁXIMO RELATIVO

  Su ordenada es la mayor de los puntos que la rodean.

  - MÍNIMO RELATIVO

  Su ordenada es la menor de los puntos que la rodean.

La siguiente gráfica representa la evolución del peso de Félix a lo largo de sus 70 años de vida:



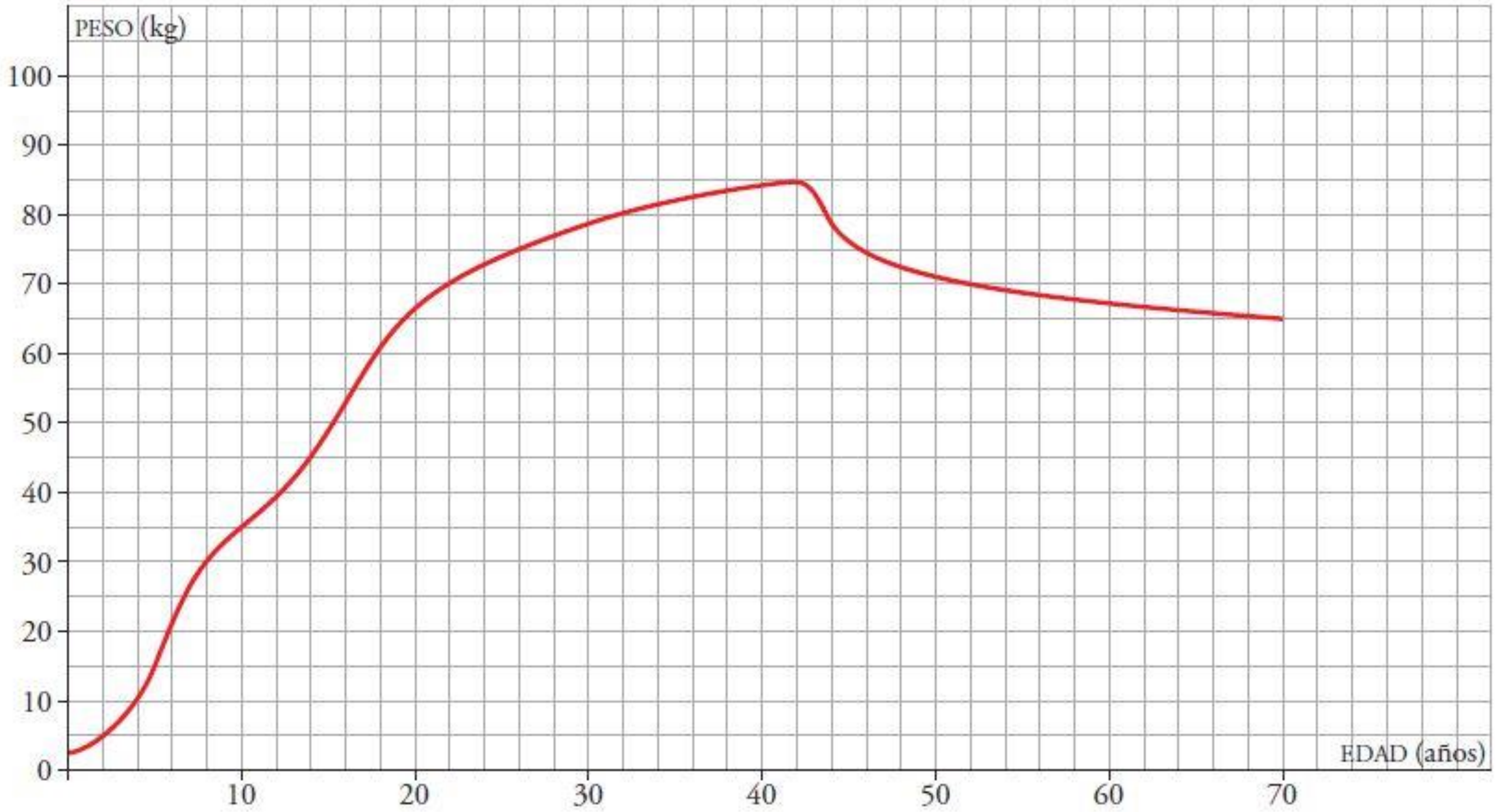
Observa la gráfica y completa.

a) La función está definida entre $\boxed{0}$ años y $\boxed{70}$ años.

b) Dominio de definición: intervalo $\boxed{0}$ - $\boxed{70}$.

c) El peso máximo de Félix fue de $\boxed{85}$ kg a los $\boxed{42}$ años.

La siguiente gráfica representa la evolución del peso de Félix a lo largo de sus 70 años de vida:



d) La función tiene un máximo en el punto (42, 85).

e) Félix aumentó de peso hasta los 85 años.

f) La función es creciente en el intervalo 0 - 42.

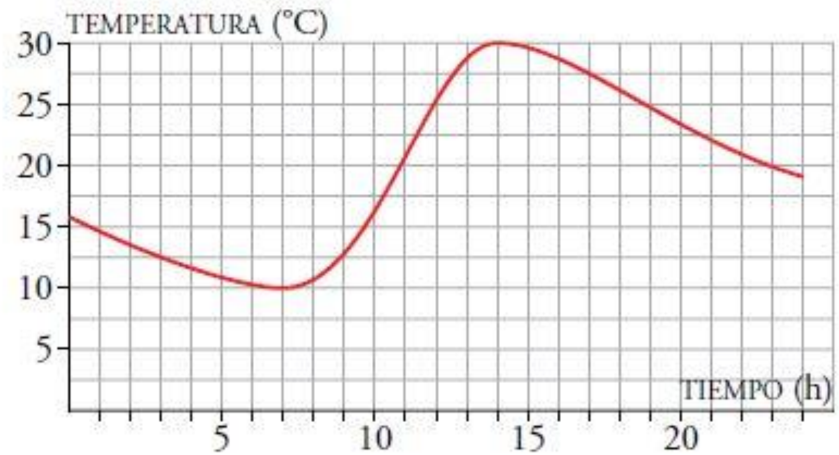
g) La función es decreciente en el intervalo 42 - 70.

1. **La gráfica de abajo da la temperatura en Jaca a lo largo de un día.**

a) Indica los intervalos de tiempo en los que crece la temperatura y aquellos en los que decrece.

b) ¿Por qué crees que se producen esos aumentos y disminuciones de temperatura en esos tramos?

c) ¿Crees que en la ciudad es verano o invierno? Justifícalo.



a) La temperatura en Jaca aumenta en el intervalo 7-14 horas y decrece en los intervalos 0-7 horas y 14-24 horas.

b) Por los cambios de temperatura a lo largo del día. Por la mañana las temperaturas van aumentando y, al acercarse la noche, las temperaturas disminuyen.

c) La temperatura más alta que alcanza son los 30 °C durante el día y la temperatura más baja que alcanza son los 10 °C. Por tanto, cuando se ha hecho esta gráfica era verano.

Tarea: 2, página 149

2. La siguiente gráfica muestra el porcentaje de ocupación de unos multicines en una ciudad a lo largo de un determinado mes:

a) ¿En qué días caen los fines de semana? ¿Cómo puedes saberlo?

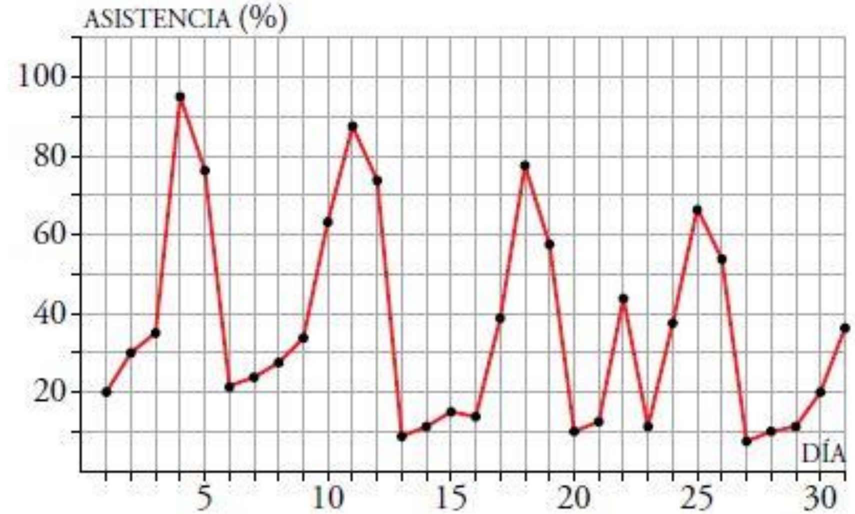
b) ¿Qué día ha habido más espectadores? ¿Y menos? ¿Qué días de la semana son?

c) ¿Cuántos máximos y cuántos mínimos relativos tiene la gráfica de la función?

d) Hubo un día entre semana que fue festivo. ¿De qué día se trata?

e) Escribe un resumen de la asistencia que han tenido los multicines a lo largo de este mes.

f) Un cierto día de este mes, viernes, televisaron un partido de fútbol importantísimo. ¿Qué día podemos suponer que fue?



Tarea: 2, página 149

2. **La siguiente gráfica muestra el porcentaje de ocupación de unos multicines en una ciudad a lo largo de un determinado mes:**

a) ¿En qué días caen los fines de semana? ¿Cómo puedes saberlo?

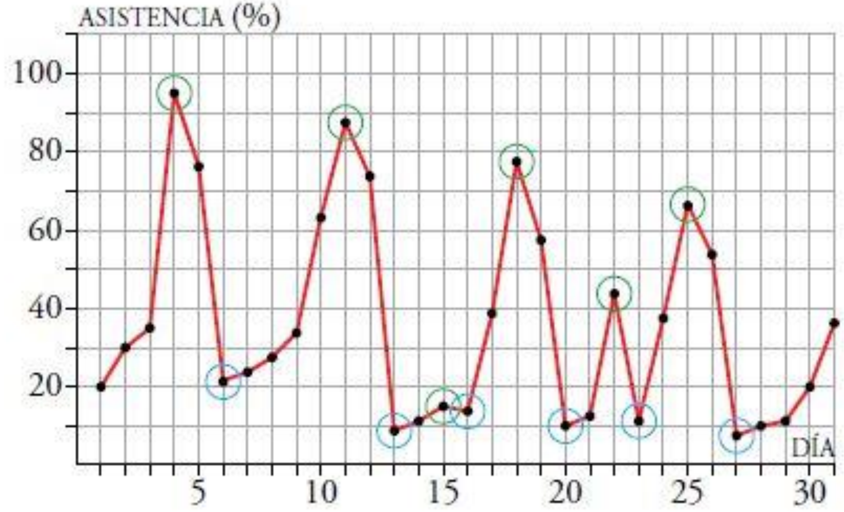
b) ¿Qué día ha habido más espectadores? ¿Y menos? ¿Qué días de la semana son?

c) ¿Cuántos máximos y cuántos mínimos relativos tiene la gráfica de la función?

a) Son fines de semana los días 4, 5, 11, 12, 18, 19, 25 y 26. Deducimos que son esos días porque son los días en los que más espectadores van al cine.

b) El día 4 hubo más espectadores y el 27 hubo menos espectadores. Estos días son sábado y lunes, respectivamente.

c) La gráfica tiene 6 máximos (en verde) y 6 mínimos (en azul).



Tarea: 2, página 149

2. La siguiente gráfica muestra el porcentaje de ocupación de unos multicines en una ciudad a lo largo de un determinado mes:

a) ¿En qué días caen los fines de semana? ¿Cómo puedes saberlo?

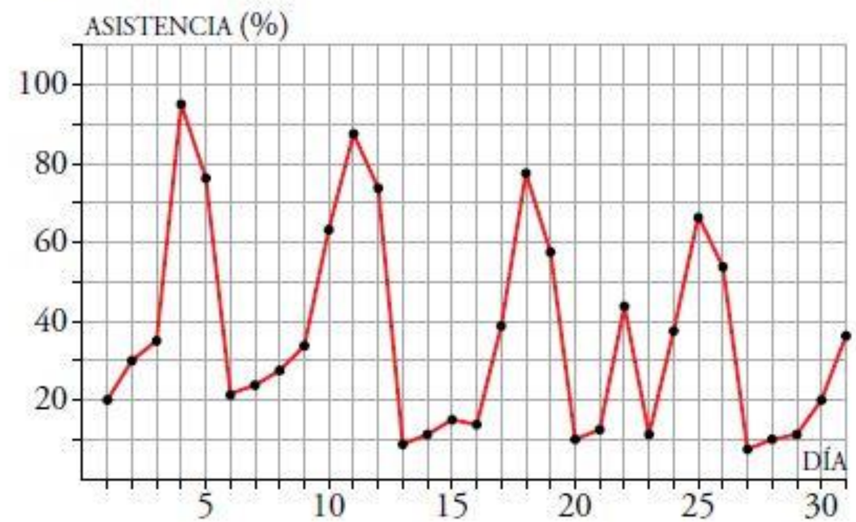
b) ¿Qué día ha habido más espectadores? ¿Y menos? ¿Qué días de la semana son?

c) ¿Cuántos máximos y cuántos mínimos relativos tiene la gráfica de la función?

d) Hubo un día entre semana que fue festivo. ¿De qué día se trata?

e) Escribe un resumen de la asistencia que han tenido los multicines a lo largo de este mes.

f) Un cierto día de este mes, viernes, televisaron un partido de fútbol importantísimo. ¿Qué día podemos suponer que fue?



d) El miércoles 22. Es el día entre semana con mayor asistencia.

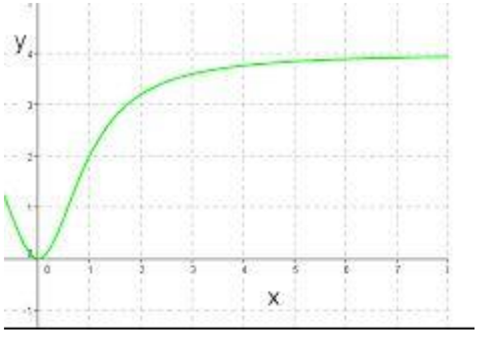
e) La asistencia es mayor durante los fines de semana, en particular en el primero. A lo largo del mes se puede observar que va disminuyendo con respecto a la primera semana. Desde el lunes al sábado la gráfica es creciente, es decir, el porcentaje de asistencia va aumentando, mientras que del sábado al lunes decrece. Los días de mayor porcentaje de asistencia son los sábados, en general. Sin embargo, en los días 15 y 22 podemos ver dos máximos. El día 22 fue día festivo, y podemos apreciar un considerable aumento de asistencia con respecto a los días anterior y posterior.

f) El día 3. Es el viernes con la asistencia más baja.

VARIACIONES, TENDENCIA Y CONTINUIDAD

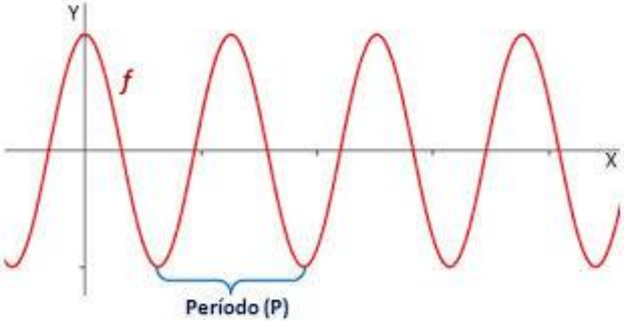
- TENDENCIA

Comportamiento a largo plazo. Se ve una tendencia.

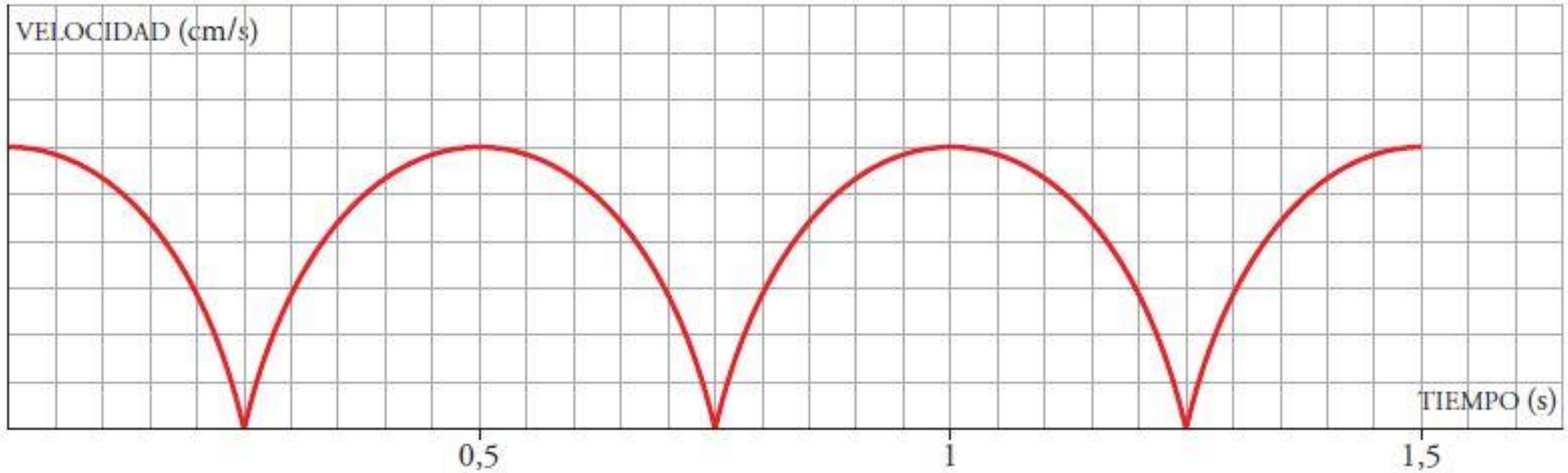


Periodicidad- Funciones Periódicas.

Su comportamiento se repite cada vez que la variable independiente (x) recorre un cierto intervalo llamado Periodo.



La siguiente gráfica representa la variación de la velocidad del péndulo de un reloj con el paso del tiempo:



Observa la gráfica y completa.

a) ¿Cuánto tiempo tarda el péndulo en dar una oscilación completa? (Es decir, desde que está en el punto más alto de la izquierda hasta que vuelve a estar en dicho punto).

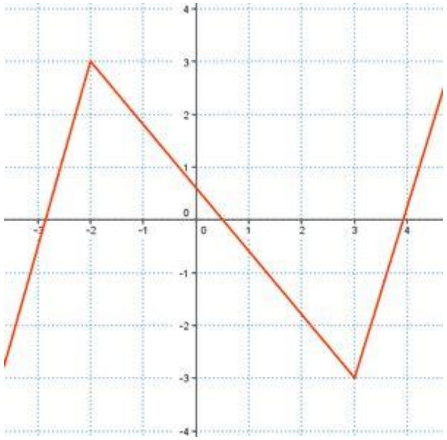
0,5 s

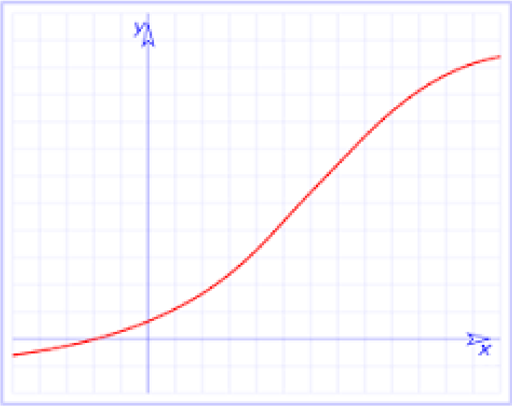
b) ¿Cuál es el periodo de la función?

0,5 s

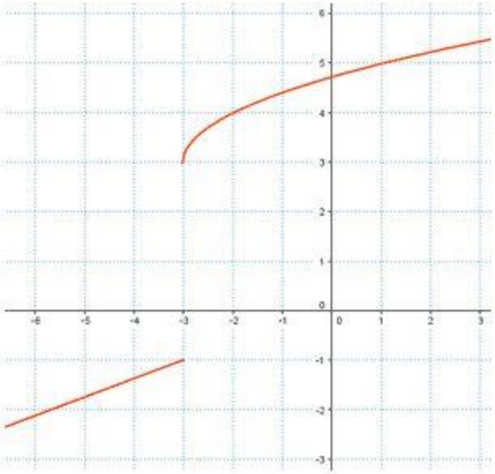
VARIACIONES, TENDENCIA Y CONTINUIDAD

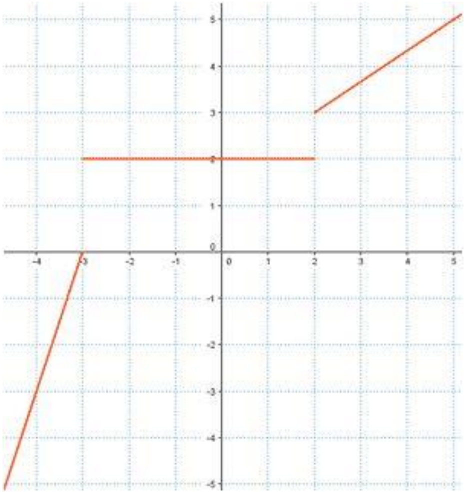
- CONTINUIDAD
  - CONTINUA





  - DISCONTINUA





1. **La entrada al parque de atracciones vale 5 €, y por cada atracción hay que pagar 1 €.**

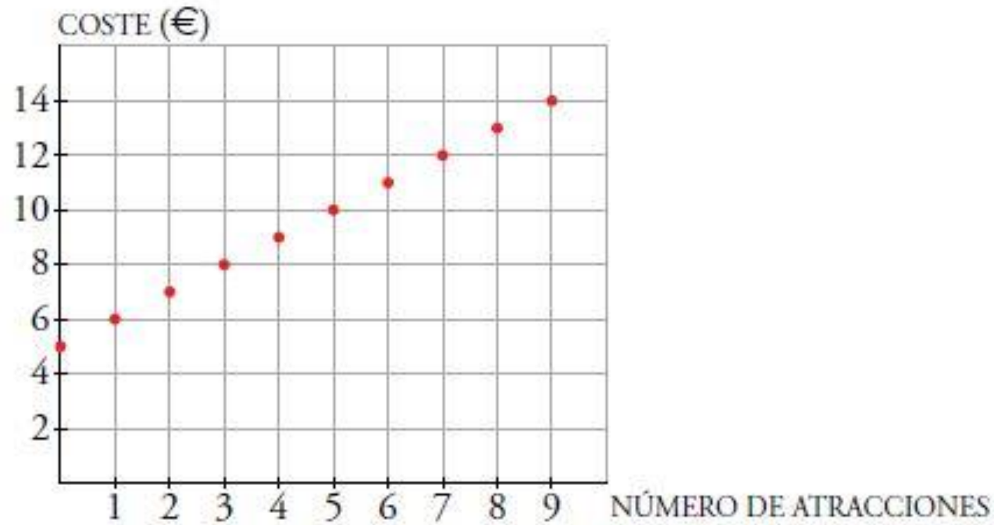
a) Representa esta función:

atracciones en las que se monta → coste

b) ¿Se pueden unir los puntos de la gráfica?

c) ¿Cuánto costará subir a 12 atracciones? ¿Y a 20?

a)



b) No pueden unirse porque una persona no puede montarse en media atracción o solo pagar medio viaje.

c) Subir a doce atracciones costará 5 € más un euro por atracción, es decir, 5 + 12 = 17 €.

Subir a 20 atracciones costará 5 + 20 = 25 €.

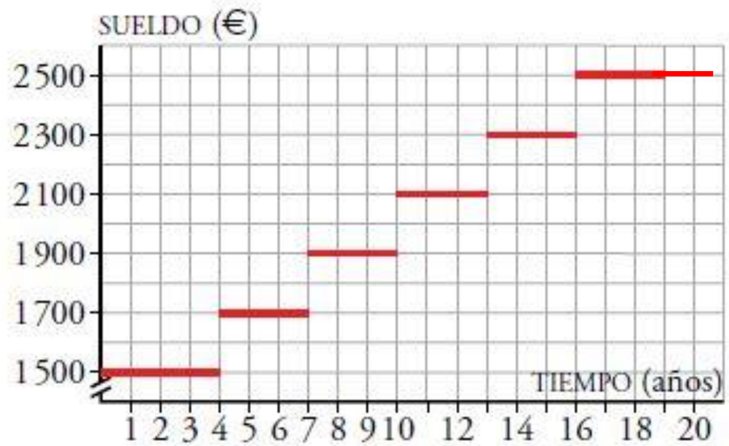
Tarea: 2, página 151 y 2 página 155

2. **La gráfica de abajo muestra el sueldo mensual de un trabajador en una empresa a lo largo de su vida.**

a) ¿Cuánto tiempo lleva el trabajador en la empresa cuando le suben el sueldo por primera vez?

b) ¿Cuánto gana a los 12 años de entrar? ¿Y a los 20?

c) ¿Es una función continua?



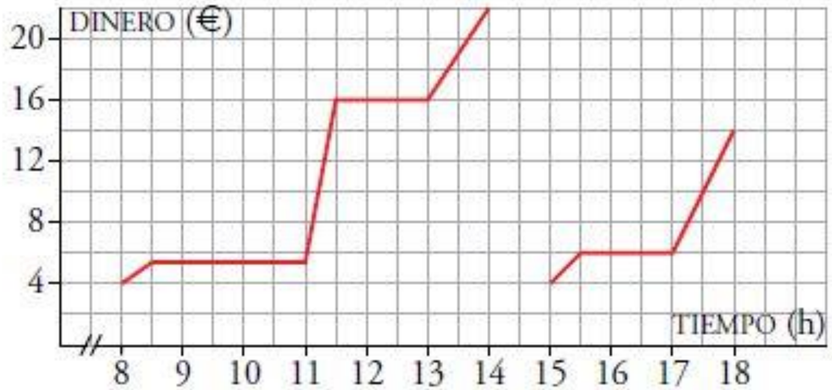
a) Cuando le suben el sueldo por primera vez, el trabajador lleva en la empresa 4 años.

b) A los 12 años de entrar cobra 2 100 €, y a los 20, 2 500 €.

c) No, no es continua.

Tarea: 2, página 155

2. En la puerta de un colegio hay un puesto de golosinas. En esta gráfica se ve la cantidad de dinero que hay en su caja a lo largo de un día:



a) ¿A qué hora empiezan las clases de la mañana?

b) ¿A qué hora es el recreo? ¿Cuánto dura?

c) El puesto se cierra a mediodía, y el dueño se lleva el dinero a casa. ¿Cuáles fueron los ingresos de la mañana?

d) ¿Cuál es el horario de tarde en el colegio?

e) ¿Es esta una función continua o discontinua?

a) Las clases de la mañana empiezan a las ocho y media.

b) El recreo es a las 11 y dura media hora.

c) Por la mañana, los ingresos fueron de 22 €.

d) Por la tarde, las clases empiezan a las tres y media y terminan a las cinco.

e) Es una función discontinua.

3, página 155

3. **La siguiente gráfica describe la distancia del cometa Halley al Sol a lo largo de los dos últimos siglos. Cada 76 años se puede ver desde la Tierra cuando más cerca está del Sol.**

a) ¿Es una función periódica? ¿Qué periodo tiene?

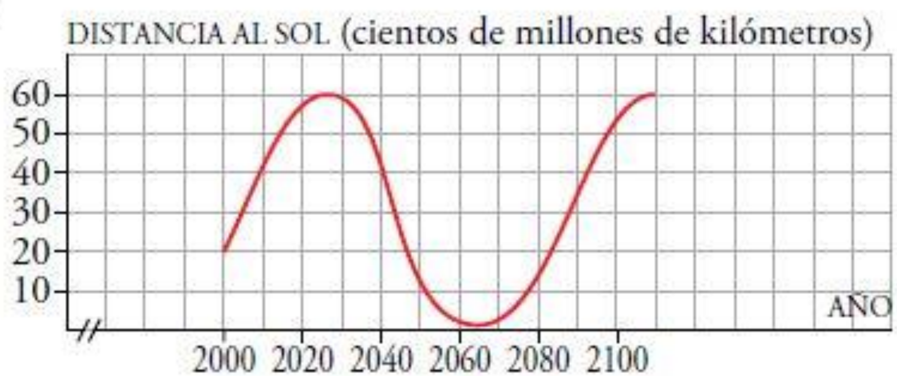
b) ¿Cuándo, aproximadamente, fue la última vez que se dejó ver desde la Tierra? ¿En qué año se volverá a ver?

c) Dibuja en tu cuaderno la gráfica correspondiente a los años 2000 a 2100. ¿A qué distancia del Sol, aproximadamente, estará en el 2016?

a) Es una función periódica, con periodo de 76 años.

b) La última vez que se vio fue en 1986 y la próxima vez que se verá será en 2062.

c)



EXPRESIÓN ANALÍTICA DE UNA FUNCIÓN

La expresión analítica de una función es una ecuación que relaciona la variable dependiente (y) con la variable independiente (x).

$y=3x-1$

X	-2	-1	-0	1	2	3	4
Y	5	-4	-1	2	5	8	11

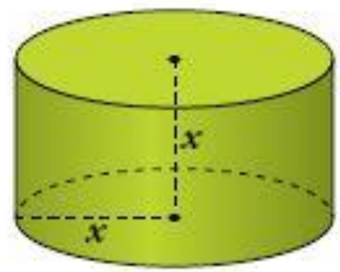
2, página 153

2. Imagina un cilindro cuya altura, *x*, sea igual al radio de su base.

a) ¿Cuál es la expresión analítica de su volumen?

Recuerda que el volumen de un cilindro es el área de la base por la altura.

b) Obtén la expresión analítica del área del cilindro.



a)

El volumen de un cilindro es:

$\mathrm{V}cilindro = A_{base}h, siendo\ el\ A_{base} = \pi r^2$

$$V = \pi x^2 x = \pi x^3$$

b)

$$\mathrm{f(x)} = A_{cilindro} = A_{bases} + A_{latera}$$

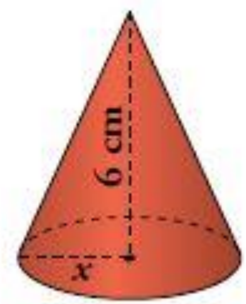
$$A_{bases} = \pi r^2 + \pi r^2 = 2\pi r^2$$

$$A_{lateral} = P_C h = 2\mathrm{\pi} xx = 2\pi r^2$$

$$A_{cilindro} = 2\pi r^2 + 2\pi r^2 = 4\pi r^2$$

3, página 153

3. Indica cuál es la expresión analítica del volumen de un cono sabiendo que su altura son 6 cm y el radio de su base es variable.



Recuerda que el volumen de un cono es 1/3 del área de la base por la altura.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi x^2 \cdot 6 \rightarrow V = 2\pi x^2$$

EVALUACIÓN DE UNA FUNCIÓN

La evaluación de una función consiste en la sustitución de unos valores de x para obtener la y.

$$f(x) = \frac{x}{2x+1} \quad x: 0; -2; -\frac{1}{2}$$

$$f(0) = \frac{0}{2(0)+1} = 0$$

$$f(-2) = \frac{-2}{2(-2)+1} = \frac{-2}{-4+1} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$f(x) = \frac{-\frac{1}{2}}{2\left(-\frac{1}{2}\right)+1} = \frac{-\frac{1}{2}}{-1+1} = \nexists$$

1, página 152

La función que relaciona la medida de la base, x, con el área del rectángulo viene dada por la formula:

$A = f(x) = x(40 - x) \; con \; 0 < x < 40$, que es la expresión analítica.

1. **Indica cuáles de los siguientes pares de valores corresponden a la base y al área de algún rectángulo del ejemplo anterior:**

a) Base: $x = 1$ cm $\rightarrow$ Área: $A = 39$ cm^2

b) $x = 5 \rightarrow A = 35$

c) $x = 22 \rightarrow A = 396$

d) $x = 42 \rightarrow A = -84$

1, página 152

La función que relaciona la medida de la base, x, con el área del rectángulo viene dada por la formula: $A = f(x) = x(40 - x)\ con\ 0 < x < 40$, que es la expresión analítica.

1. **Indica cuáles de los siguientes pares de valores corresponden a la base y al área de algún rectángulo del ejemplo anterior:**

a) Base: $x = 1$ cm $\rightarrow$ Área: $A = 39$ cm^2

b) $x = 5 \rightarrow A = 35$

c) $x = 22 \rightarrow A = 396$

d) $x = 42 \rightarrow A = -84$

a) $1 \cdot 39 = 39 = A \rightarrow$ Sí es igual.

b) $5 \cdot 35 = 175 \neq 35 \rightarrow$ No es igual.

c) $22 \cdot 18 = 396 = A \rightarrow$ Sí es igual.

d) El área no puede ser negativa.

Hazlo tu, página 154

Comprueba que A (III) pasa por (2, 3) y (4, 1); B (IV) pasa por (1, 3), (2, 4), (3, 3) y (4, 0); C (I) pasa por (1, 2), (2, 1), (3, 2) y (4, 5) y D (II) pasa por (6, 5). Además, en esta última, cuando *x* se hace grande, la variable *y* se va acercando a 6. Para verlo, calcula, por ejemplo, el valor de *y* para *x* = 100 y para *x* = 1 000.

$$I.\, y = 4x + 5$$
$$II.\, y = 6 - \frac{6}{x}$$
$$III.\, y = 5 - x$$
$$IV.\, y = 4x - x^2$$

Hazlo tu, página 154

Comprueba que A (III) pasa por (2, 3) y (4, 1); B (IV) pasa por (1, 3), (2, 4), (3, 3) y (4, 0); C (I) pasa por (1, 2), (2, 1), (3, 2) y (4, 5) y D (II) pasa por (6, 5). Además, en esta última, cuando x se hace grande, la variable y se va acercando a 6. Para verlo, calcula, por ejemplo, el valor de y para $x = 100$ y para $x = 1\,000$.

A

- $y = 5 - x$

  Si $x = 2 \rightarrow y = 5 - 2 = 3$

  Si $x = 4 \rightarrow y = 5 - 4 = 1$

B

- $y = 4x - x^2$

  Si $x = 1 \rightarrow y = 4 \cdot 1 - 1^2 = 3$

  Si $x = 2 \rightarrow y = 4 \cdot 2 - 2^2 = 4$

  Si $x = 3 \rightarrow y = 4 \cdot 3 - 3^2 = 3$

  Si $x = 4 \rightarrow y = 4 \cdot 4 - 4^2 = 0$

$$I.\; y = 4x + 5$$
$$II.\; y = 6 - \frac{6}{x}$$
$$III.\; y = 5 - x$$
$$IV.\; y = 4x - x^2$$

Página 154

Comprueba que A (III) pasa por (2, 3) y (4, 1); B (IV) pasa por (1, 3), (2, 4), (3, 3) y (4, 0); C (I) pasa por (1, 2), (2, 1), (3, 2) y (4, 5) y D (II) pasa por (6, 5). Además, en esta última, cuando x se hace grande, la variable y se va acercando a 6. Para verlo, calcula, por ejemplo, el valor de y para $x = 100$ y para $x = 1\,000$.

C • $y = x^2 - 4x + 5$

Si $x = 1 \rightarrow y = 1^2 - 4 \cdot 1 + 5 = 2$

Si $x = 2 \rightarrow y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = 1$

Si $x = 3 \rightarrow y = 3^2 - 4 \cdot 3 + 5 = 2$

Si $x = 4 \rightarrow y = 4^2 - 4 \cdot 4 + 5 = 5$

$I.\, y = 4x + 5$

$II.\, y = 6 - \dfrac{6}{x}$

$III.\, y = 5 - x$

$IV.\, y = 4x - x^2$

D • $y = 6 - \dfrac{6}{x}$

Si $x = 6 \rightarrow y = 6 - \dfrac{6}{6} = 5$

Si $x = 100 \rightarrow y = 6 - \dfrac{6}{100} = 5{,}94$

Si $x = 1\,000 \rightarrow y = 6 - \dfrac{6}{1000} = 5{,}994$

Evalúa las siguientes funciones para los valores de x indicados en cada una:

a) $f(x) = 2x + 3 \quad x: 2; a; \frac{1}{2}$

b) $f(x) = 2x^2 + 1 \quad x: -2; \frac{a}{2}; \frac{1}{2}$

c) $f(x) = -x^3 + 4x^2 - x + 1 \quad x: -2; -1$

d) $f(x) = \frac{34}{x-6} \quad x: 2; 10; 6$

f) $f(x) = \sqrt{4x - 2} \quad x: \frac{1}{2}; 2$

g) $f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x \leq 0 \\ x^2 + 1 & x > 0 \end{cases} \quad x: -2; 3$

CÁLCULO DEL DOMINIO

Se puede obtener con: expresión gráfica y expresión analítica.

a)Funciones lineales

$f(x) = mx + n$

b)Funciones cuadráticas

$f(x) = ax^2 + bx + c$

El dominio de la función son todos los números reales.

$\{x/x \in R\}$

$(-\infty, +\infty)$

c)Funciones racionales

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \; siendo \; h(x) \neq 0$$

El dominio serán todos los valores reales menos el valor o valores de x que hagan 0 el denominador.

d)Funciones radicales

$$f(x) = \sqrt{g(x)} \; siendo \; g(x) \geq 0$$

CÁLCULO DEL DOMINIO

Se puede expresar de 3 formas:

Intervalo	Desigualdad	Sobre la recta
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	
$(a, +\infty)$	$\{x \mid x > a\}$	
$[a, +\infty)$	$\{x \mid x \geq a\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	
$(-\infty, +\infty)$	$\{x \mid x \in R\}$	

CÁLCULO DEL DOMINIO

Calcula y expresa el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4x^2 - x + 1$

b) $f(x) = 3x - 2$

c) $f(x) = \frac{2}{x-2}$

d) $f(x) = \sqrt{x + 4}$