Repaso de Álgebra

Colegio Molière

Repasaremos algunas reglas y procedimientos básicos que te serán útiles a lo largo del curso

Operaciones aritméticas

$$a + b = b + a \qquad ab = ba \qquad \text{(Ley Conmutativa)}$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad (ab)c = a(bc) \qquad \text{(Ley Asociativa)}$$

$$a(b + c) = ab + bc \qquad \text{(Ley Distributiva)}$$

En particular, si $a = -1$ en la Ley Distributiva, obtenemos:

$$-(b + c) = (-1)(b + c) = (-1)b + (-1)c$$

Con lo cual:

$$-(b + c) = -b - c$$

Ejemplo 1

a) $(3xy)(-4x) = 3(-4)x^2y = -12x^2y$

b) $2t(7x + 2tx - 11) = 14tx + 4t^2x - 22$

c) $4 - 3(x - 2) = 4 - 3x + 6 = 10 - 3x$

Si utilizamos tres veces la Ley Distributiva, obtenemos:

$$(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd$$

Esto nos dice que cuando multiplicamos dos factores, en este caso $(a+b)$ y $(c+d)$, lo que hacemos es multiplicar cada término de un factor, con cada término del otro.

En el caso donde $a = c$ y $b = d$, tenemos:

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$$

o

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (1)$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (2)$$

Ejemplo 2

a) $(2x+1)(3x-5) = 6x^2 - 10x + 3x - 5 = 6x^2 - 7x - 5$

b) $(x+6)^2 = x^2 + 12x + 36$

c) $3(x-1)(4x+3) - 2(x+6) = 3(4x^2 - x - 3) - 2x - 12 =$
$12x^2 - 3x - 9 - 2x - 12 = 12x^2 - 5x - 21$

Fracciones

Para sumar dos fracciones con el mismo denominador, usamos la Ley Distributiva:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{1}{b} \times a + \frac{1}{b} \times c = \frac{1}{b}(a+c) = \frac{a+c}{b}$$

Por lo tanto es cierto:

$$\frac{(a+c)}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$$

Pero recuerda que tienes que evitar este común error:

$$\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c} \qquad \otimes$$

(De hecho, toma a = b = c = 1 para que veas el error)

Para sumar dos fracciones con denominadores diferentes, usamos el mínimo común denominador:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Para multiplicar esas fracciones:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Particularmente, es cierto que:

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Para dividir fracciones, invertimos y multiplicamos:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Ejemplo 3

a) $\dfrac{x+3}{x} = \dfrac{x}{x} + \dfrac{3}{x} = 1 + \dfrac{3}{x}$

b) $\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{3(x+2) + x(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{3x + 6 + x^2 - x}{x^2 + x - 2} = \dfrac{x^2 + 2x + 6}{x^2 + x - 2}$

c) $\dfrac{s^2 t}{u} \cdot \dfrac{ut}{-2} = \dfrac{s^2 t^2 u}{-2u} = -\dfrac{s^2 t^2}{2}$

d) $\dfrac{\frac{x}{y} + 1}{1 - \frac{y}{x}} = \dfrac{\frac{x+y}{y}}{\frac{x-y}{x}} = \dfrac{x+y}{y} \times \dfrac{x}{x-y} = \dfrac{x(x+y)}{y(x-y)} = \dfrac{x^2 + xy}{xy - y^2}$

Factorización

Hemos usado la Ley Distributiva para expandir ciertas expresiones algebráicas. En ciertos momentos necesitamos revertir ese proceso (usando, una vez más, la Ley Distributiva), factorizando una determinada expresión, como el producto de otras más simples. La solución más simple nos la encontramos cuando la expresión tiene un factor común, por ejemplo:

$$3x(x-2) = 3x^2 - 6x$$

Si leemos la expresión de izquierda a derecha, estaremos expandiendo. Viéndolo de derecha a izquierda, estaremos factorizando

Para factorizar una expresión cuadrática de la forma $x^2 + bx + c$ observamos que:

$$(x + r)(x + s) = x^2 + (r + s)x + rs$$

Por lo tanto, debemos buscar dos números, r y s, que cumplan que $r + s = b$ y $rs = c$

Ejemplo 4

Factorizar $x^2 + 5x - 24$

SOLUCIÓN: Los dos números enteros, que sumados dan 5, y multiplicados -24, son -3 y 8. Por lo tanto:

$$x^2 + 5x - 24 = (x - 3)(x + 8)$$

Ejemplo 5

Factorizar $2x^2 - 7x - 4$

SOLUCIÓN: A pesar de que el coeficiente de x^2 no es 1 , podemos aún buscar factores de la forma $2x + r$ y $x + s$, donde $rs = -4$. Experimentando descubrimos:

$$2x^2 - 7x - 4 = (2x + 1)(x - 4)$$

Algunas expresiones cuadráticas pueden factorizarse empleando las Ecuaciones 1 y 2 (de derecha a izquierda), o utilizando la fórmula para la diferencia de cuadrados:

$$2a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \tag{3}$$

En el caso de una diferencia de cubos, empleamos la fórmula análoga:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \tag{4}$$

la que puedes verificar expandiendo el miembro de la derecha. Análogamente, en el caso de la suma de cubos:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \tag{5}$$

Ejemplo 6

a) $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ (Ecuación 2: a = x, b = 3)

b) $4x^2 - 25 = (2x+5)(2x-5)$ (Ecuación 3: a = 2x, b = 5)

c) $x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$ (Ecuación 5: a = x, b = 2)

Ejemplo 7

Simplificar $\dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 2x - 8}$

SOLUCIÓN: Factorizando, tanto numerador como denominador, obtenemos:

$$\frac{x^2 - 16}{x^2 - 2x - 8} = \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x+2)} = \frac{x+4}{x+2}$$

Para factorizar polinomios de grado 3 o mayores, podemos utilizar:

Teorema del Resto Si P es un polinomio y $P(b) = 0$,
entonces $x - b$ es un factor de $P(x)$ (6)

Ejemplo 8

Factorizar $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$

SOLUCIÓN: sea $P(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$. Si $P(b) = 0$, donde b es un número entero, entonces b es un factor de 24. Por lo tanto, las posibilidades para b serían ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 8, ± 12 y ± 24. Hallamos que $P(1) = 12$, $P(-1) = 30$, $P(2) = 0$. Por el Teorema del Resto, $x - 2$ es un factor. Para seguir factorizando, usaremos la división de polinomios:

$$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 | x - 2$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 - 10x + 24 &= (x-2)(x^2 - x - 12) \\ &= (x-2)(x+3)(x-4) \end{aligned}$$

Completar el cuadrado

Esta es una técnica muy útil para dibujar parábolas o integrar funciones racionales. Completar el cuadrado significa reescribir una expresión cuadrática $ax^2 + bx + c$ de la forma $a(x+p)^2 + q$, lo que se consigue mediante:

1. Factorizar el número a de los términos con x
2. Añadir y restar el cuadrado de la mitad del coeficiente de x

De forma general tenemos:

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x\right] + c \\
&= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 9

Reescribir $x^2 + x + 1$

SOLUCIÓN: El cuadrado de la mitad del coeficiente d x es $\frac{1}{4}$. Así:

$$
\begin{aligned}
x^2 + x + 1 &= x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 \\
&= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 10

Reescribir $2x^2 - 12x + 11$

$$
\begin{aligned}
2x^2 - 12x + 11 &= 2[x^2 - 6x] + 11 \\
&= 2[x^2 - 6x + 9 - 9] + 11 \\
&= 2[(x-3)^2 - 9] + 11 \\
&= 2(x-3)^2 - 7
\end{aligned}
$$

Fórmula cuadrática

Al completar el cuadrado, tal como hemos hecho arriba, podemos obtener la siguiente fórmula para hallar las raíces de una ecuación cuadrática

Fórmula cuadrática Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c$ son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{7}$$

Ejemplo 11

Resolver $5x^2 + 3x - 3$

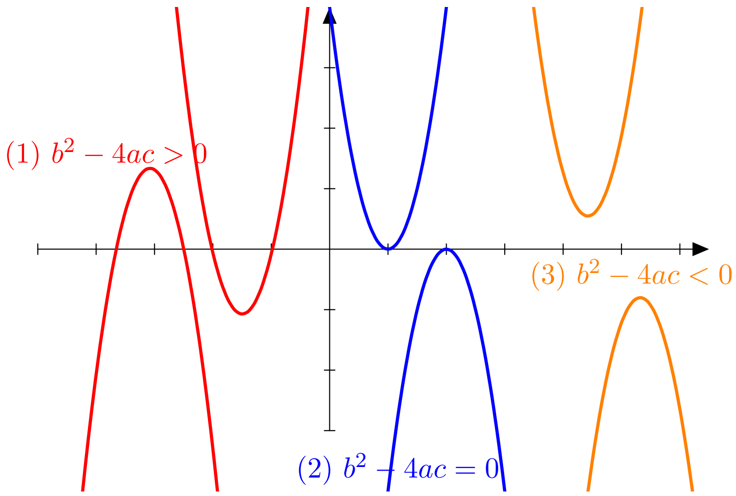
SOLUCIÓN: conociendo que $a = 5$, $b = 3$ y $c = -3$, la fórmula cuadrática nos da las soluciones:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(5)(-3)}}{2(5)} = \frac{-3 \pm \sqrt{69}}{10}$$

La cantidad $b^2 - 4ac$ que aparece en la fórmula cuadrática recibe el nombre de **discriminante** (se le suele representar por la letra griega mayúscula delta: Δ). El discriminante puede presentar tres opciones:

1. Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tendrá dos raíces reales
2. Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tendrá dos raíces iguales
3. Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación **no** tendrá raíces reales (Las raíces serán complejas)

Los tres casos corresponden al número de veces que la parábola $y = ax^2 + bx + c$ cruza al eje x; 2, 1 o ninguna (Figura 1). En el caso (3) la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c$ no puedes factorizarse y se dice que es **irreducible**



Ejemplo 12

La ecuación cuadrática x^2+x+2 es irreducible debido a que su discriminante es negativo:

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 1^2 - 4(1)(2) \\ &= -7 \\ &-7 < 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, es imposible factorizar $x^2 + x + 2$ (imposible es términos de números reales, $\mathbb{R}$, pero no en el de los complejos, $\mathbb{C}$)

Teorema del Binomio

Recuperemos la expresión binomial de la Ecuación 1:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Si multiplicamos ambos miembros de la ecuación por $(a + b)$, y simplificamos, obtendremos la expansión binomial :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \tag{8}$$

Repitiendo el procedimiento obtendríamos:

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Generalizando, tenemos la fórmula siguiente:

Teorema del Binomio Si k es un número entero positivo, entonces

$$\begin{aligned}(a+b)^k = a^k + ka^{k-1}b + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}a^{k-2}b^2 \\ + \frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{k-3}b^3 \\ + \ldots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}a^{k-n}b^n \\ + \ldots + kab^{k-1} + b^k\end{aligned} \tag{9}$$

Ejemplo 13

Expandir $(x-2)^5$

SOLUCIÓN: Usando el Teorema del Binomio con $a = x, b = -2, k = 5$, obtenemos

$$\begin{aligned}(x-2)^5 &= x^5 + 5x^4(-2) + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}x^3(-2)^2 + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}x^2(-2)^3 + 5x(-2)^4 + (-2)^5 \\ &= x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32\end{aligned}$$

Radicales

Los radicales que más habitualmente nos podemos encontrar son las raíces cuadradas. El símbolo $\sqrt{}$ significa "la raiz cuadrada positiva de". Así,

$$x = \sqrt{a} \qquad \text{significa} \qquad x^2 = a \qquad \text{y} \qquad x \geq 0$$

Ya que $a = x^2 \geq 0$, el símbolo $\sqrt{a}$ solo tiene sentido cuando $a \geq 0$. Aquí tienes dos reglas para trabajar con **raíces cuadradas**:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \qquad\qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \tag{10}$$

Sin embargo, no existe una regla similar cuando se trata de la raiz cuadrada de una suma. De hecho, deberías recordar que tienes que evitar el siguiente error común:

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b} \qquad\qquad \otimes$$

(Por ejemplo, toma $a = 9$ y $b = 16$ para que veas el error)

Ejemplo 14

$$(a)\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = 3 \qquad\qquad (b)\sqrt{x^2 y} = \sqrt{x^2}\sqrt{y} = |x|\sqrt{y}$$

Observa que $\sqrt{x^2} = |x|$, esto es debido a que $\sqrt{}$ indica la raiz cuadrada positiva (Ver Valor Absoluto)

Generalizando, si n es un número entero positivo,

$$\boxed{\begin{array}{c} x = \sqrt[n]{a} \qquad \text{significa} \qquad x^n = a \\ \text{Si } n \text{ es par, entonces } a \geq 0 \text{ y } x \geq 0 \end{array}}$$

Así, $\sqrt[3]{-8} = -2$, porque $(-2)^3 = -8$, pero $\sqrt[4]{-8}$ y $\sqrt[6]{8}$ no están definidos. Las siguientes reglas son válidas:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} \qquad\qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Ejemplo 15

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{x^3 x} = \sqrt[3]{x^3}\,\sqrt[3]{x} = x\sqrt[3]{x}$$

Para **racionalizar** un numerador o denominador que contenga una expresión tal que $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, multiplicamos ambos, numerador y denominador, por su conjugada $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. De esta forma, podemos aprovecharnos de la fórmula de la diferencia de cuadrados:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$$

Ejemplo 16

Racionalizar el numerador en la expresión $\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

SOLUCIÓN: Multiplicamos numerador y denominador por la conjugada del numerador $\sqrt{x+4}+2$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}\right) &= \frac{(x+4)-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} \\
&= \frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)} \\
&= \frac{1}{x(\sqrt{x+4}+2)}
\end{aligned}$$

Exponentes

Sea a cualquier número positivo y sea n cualquier número **entero** positivo. Entonces,

1. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}$
2. $a^0 = 1$
3. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
4. $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

   $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ donde m es cualquier número entero

Leyes de los Exponentes (11)

Sean a y b números positivos, y sean m y n cualquier número racional (esto es, fracciones o enteros). Entonces

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $(ab)^m = a^m b^m$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m} \qquad b \neq 0$

Ejemplo 17

1. $2^8 \times 8^2 = 2^8 \times (2^3)^2 = 2^8 \times 2^6 = 2^{14}$
2. $\dfrac{x^{-2} - y^{-2}}{x^{-1} + y^{-1}} = \dfrac{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}} = \dfrac{\dfrac{y^2 - x^2}{x^2y^2}}{\dfrac{y+x}{xy}} = \dfrac{y^2 - x^2}{x^2y^2} \cdot \dfrac{xy}{y+x} = \dfrac{(y-x)(y+x)}{xy(y+x)} = \dfrac{y-x}{xy}$
3. $4^{3/2} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$ Una solución alternativa sería:

   $4^{3/2} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$
4. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \dfrac{1}{x^{4/3}} = x^{-4/3}$
5. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^3 \left(\dfrac{y^2x}{z}\right)^4 = \dfrac{x^3}{y^3} \cdot \dfrac{y^8x^4}{z^4} = x^7y^5z^{-4}$

Desigualdades / Inecuaciones

Cuando trabajes con inecuaciones, debes observar las siguientes reglas:

Reglas para las Desigualdades

1. *Si* $a < b$, entonces $a + c < b + c$
2. *Si* $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$
3. *Si* $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$
4. *Si* $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$
5. *Si* $0 < a < b$, entonces $1/a > 1/b$

La Regla 1 nos dice que podemos sumar cualquier número a ambos lados de la desigualdad, la Regla 2 dice que dos desigualdades pueden sumarse. Sin embargo, tenemos que tener cuidado con el producto. La Regla 3 dice que podemos multiplicar ambos lados de una desigualdad por un número *positivo*, pero la Regla 4 dice que *si multiplicamos ambos lados de la desigualdad por un número negativo, entonces, revertimos su sentido* $\otimes$. Por ejemplo, si tomamos la desigualdad $3 < 5$ y la multiplicamos por 2, obtenemos $6 < 10$, pero si lo hacemos por -2, obtenemos $-6 > -10$. Finalmente, la Regla 5 dice que si tomamos recíprocos, entonces, revertimos el sentido de la desigualdad (siempre que los números sean positivos)

Ejemplo 18

Resolver la desigualdad $1 + x < 7x + 5$

SOLUCIÓN: Solo algunos valores, y no otros, de x satisfacen esta desigualdad. *Resolver* una desigualdad significa determinar el conjunto de valores x para los cuales la desigualdad es cierta. A eso se le llama el *conjunto solución.*

Primero restamos 1 a ambos lados de la desigualdad (usamos la Regla 1 con $c = -1$):

$$x < 7x + 4$$

Luego restamos $7x$ a ambos lados de la desigualdad (Regla 1 con $c = -7x$)

$$6x < 4$$

Después dividimos ambos lados por -6 (Regla 4 con $c = -\dfrac{1}{6}$)

$$x > -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

Por lo tanto, la solución consiste en todos los números mayores que $-\frac{2}{3}$. En otras palabras, la solución a la desigualdad es el intervalo $(-\frac{2}{3}, \infty)$

Ejemplo 19

Resolver la desigualdad $x^2 - 5x + 6 \leqslant 0$

SOLUCIÓN: Primero factorizamos el miembro de la izquierda

$$(x-2)(x-3) \leqslant 0$$

Sabemos que la ecuación $(x-2)(x-3) = 0$ tiene por soluciones(raíces) 2 y 3. Los números 2 y 3 dividen la recta de los números reales en tres intervalos:

$$(-\infty, 2) \qquad (2, 3) \qquad (3, \infty)$$

Determinamos el signo de los factores en cada uno de estos intervalos. Por ejemplo,

$$x \in (-\infty, 2) \qquad \Rightarrow \qquad x < 2 \qquad \Rightarrow \qquad x - 2 < 0$$

Luego, registramos los signos de cada intervalo de la siguiente forma:

intervalo	$x-2$	$x-3$	$(x-2)(x-3)$
$x < 2$	$-$	$-$	$+$
$2 < x < 3$	$+$	$-$	$-$
$x > 3$	$+$	$+$	$+$

Otra forma de resolver la desigualdad, es tomar *valores de prueba* en la tabla anterior. Por ejemplo, si tomamos $x = 1$ para el intervalo $(-\infty, 2)$, entonces su sustitución en $x^2 - 5x + 6$ nos dará:

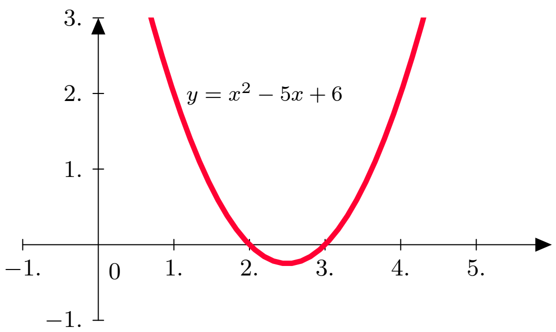
$$1^2 - 5(1) + 6 = 2$$

Concluimos que cualquier valor por debajo de 2 hará que el polinomio $x^2 - 5x + 6$ sea positivo, contraviniendo la desigualdad. De la misma forma, cualquier valor por encima de 3 producirá el mismo efecto. Por el contrario, cualquier valor comprendido entre 2 y 3 sí cumplirá la condición de desigualdad. Por lo tanto, la solución a la desigualdad $(x-2)(x-3) \leqslant 0$ es

$$\{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\} = [2, 3]$$

Observemos que el intervalo incluye también los valores 2 y 3, ya que lo que estamos buscando son los valores para x tales que el producto sea, tanto negativo como cero.

También podemos resolver gráficamente el Ejemplo 19, por ejemplo, -usando el programa Geogebra y obteniendo la gráfica:



observando dónde la curva esté por encima o por debajo del eje x cuando $2 \leqslant x \leqslant 3$

Ejemplo 20

Resolver la desigualdad $x^3 + 3x^2 > 4x$

SOLUCIÓN: Primero pasamos todos los términos, distintos a cero, a la izquierda de la desigualdad y luego factorizamos:

$$x^3 + 3x^2 - 4x > 0 \qquad \Rightarrow \qquad x(x-1)(x+4) > 0$$

Como en el Ejemplo 19, resolvemos la ecuación $x(x-1)(x+4)=0$ usando sus soluciones, $x=0$, $x=1$, $x=-4$ para dividir la recta de los números reales en cuatro intervalos, $(-\infty,-4)$, $(-4,0)$, $(0,1)$, $(1,\infty)$. En cada intervalo, el producto mantiene el signo, tal como se ve en la tabla

intervalo	x	$x-1$	$x+4$	$x(x-1)(x+4)$
$x<-4$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-4<x<0$	$-$	$-$	$+$	$+$
$0<x<1$	$+$	$-$	$+$	$-$
$x>1$	$+$	$+$	$+$	$+$

Ahora, con los signos obtenidos en la tabla, obtenemos el conjunto de soluciones para nuestra desigualdad

$$\{x \mid -4 \leqslant x \leqslant 0 \quad \text{o} \quad x \geqslant 1\} = (-4,0) \cup (1,\infty)$$

La solución la podemos ver también sobre la recta

Valor Absoluto

El **valor absoluto** de un número a, representado como $|a|$, es la distancia desde a hasta 0 sobre la recta de los números reales. Las distancias son siempre positivas ó 0, por lo que tenemos que

$$|a| \geqslant 0 \qquad \text{para todo número } a$$

recordemos que si a es negativo, entonces, -a es positivo

Por ejemplo,

$$|3| = 3 \qquad |-3| = 3 \qquad |0| = 0$$

$$|\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1 \qquad |3-\pi| = \pi - 3$$

De forma general tenemos,

$$\begin{array}{ll} |a| = a & \text{si a } \geqslant 0 \\ |a| = -a & \text{si a } \leqslant 0 \end{array}$$

Ejemplo 21

Expresa $|3x-2|$ sin emplear el símbolo de valor absoluto

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} |3x-2| &= \begin{cases} 3x-2 & \text{si } 3x-2 \geqslant 0 \\ -(3x-2) & \text{si } 3x-2 < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 3x-2 & \text{si } x \geqslant \frac{2}{3} \\ -(3x-2) & \text{si } x < \frac{2}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

⊗ Debemos recordar que el símbolo $\sqrt{\ }$ significa "la raiz cuadrada positiva de." Así, $\sqrt{r} = s$ significa $s^2 = r$ y que $s \geqslant 0$. Por lo tanto, la ecuación $\sqrt{a^2}$ no siempre es cierta. Sólo lo es cuando $a \geqslant 0$. Si $a < 0$, entonces $-a > 0$, por lo que tenemos $\sqrt{a^2} = -a$. Finalmente,

$$\sqrt{a^2} = |a| \tag{12}$$

lo que es cierto para todos los valores de a.

Propiedades del Valor Absoluto Siendo a y b números reales y n un número entero, entonces

$$1. |ab| = |a||b| \qquad 2. \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \qquad 3. |a^n| = |a|^n$$

Para resolver desigualdades o inecuaciones que involucren valores absolutos nos será útil recordar lo siguiente

Suponiendo $a > 0$, entonces

4.	$\|x\| = a$	sí y sólo sí	$x = \pm a$
5.	$\|x\| < a$	sí y sólo sí	$-a < x < a$
6.	$\|x\| > a$	sí y sólo sí	$x > a \quad \text{o} \quad x < -a$

Por ejemplo, la desigualdad $|x| < a$ nos dice que la distancia desde x hasta el origen es menor que a, sí y sólo sí, x se encuentra entre $-a$ y a.

Si a y b son cualquier número real, entonces, la distancia entre a y b es el valor absoluto de la diferencia, es decir $|a - b|$, lo que también es igual a $|b - a|$.

Ejemplo 22

Resolver $|2x - 5| = 3$

SOLUCIÓN: Por la propiedad 4 del valor absoluto, $|2x - 5| = 3$ es equivalente a

$$2x - 5 = 3 \qquad \text{ó} \qquad 2x - 5 = -3$$

Por lo tanto, $2x = 8$ ó $2x = 2$. Así, $x = 4$ ó $x = 1$

Ejemplo 23

Resolver $|x - 5| < 2$

SOLUCIÓN: Aplicando la propiedad 5 del valor absoluto, $|x - 5| < 2$ es equivalente a

$$-2 < x - 5 < 2$$

Por lo tanto, añadiendo 5 a ambos lados, obtenemos

$$3 < x < 7$$

y el conjunto de soluciones se encuentra en el intervalo abierto $(3, 7)$

Ejemplo 24

Resolver $|3x + 2| \geqslant 4$

SOLUCIÓN: Aplicando las propiedades 4 y 6, $|3x + 2| \geqslant 4$ es equivalente a

$$3x + 2 \geqslant 4 \qquad\qquad \text{ó} \qquad\qquad 3x + 2 \leqslant 4$$

En el primer caso, $3x \geqslant 2$, nos da $x \geqslant \frac{2}{3}$. En el segundo caso, $3x \leqslant -6$, nos da $x \leqslant -2$, por lo que el conjunto de soluciones lo expresamos como

$$\{x \mid x \leqslant -2 \quad \text{ó} \quad x \geqslant \tfrac{2}{3}\} = (-\infty, -2] \cup [\tfrac{2}{3}, \infty)$$

Ejercicios

RESPUESTAS **SOLUCIONES**

1 - 16

1. $(-6ab)(0,5ac)$

2. $-(2x^2y)(-xy^4)$

3. $2x(x-5)$

4. $(4-3x)x$

5. $-2(4-3a)$

6. $8-(4+x)$

7. $4(x^2-x+2)-5(x^2-2x+1)$

8. $5(3t-4)-(t^2+2)-2t(t-3)$

9. $(4x-1)(3x+7)$

10. $x(x-1)(x+2)$

11. $(2x-1)^2$

12. $(2+3x)^2$

13. $y^4(6-y)(5+y)$

14. $(t-5)^2-2(t+3)(8t-1)$

15. $(1+2x)(x^2-3x+1)$

16. $(1+x-x^2)^2$

17 - 28

17. $\dfrac{2+8x}{2}$

18. $\dfrac{9b-6}{3b}$

19 $\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{2}{x-3}$

20. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}$

21. $u+1+\dfrac{u}{u+1}$

22. $\dfrac{2}{a^2}-\dfrac{3}{ab}+\dfrac{4}{b^2}$

23. $\dfrac{x/y}{z}$

24. $\dfrac{x}{y/z}$

25. $\left(\dfrac{-2r}{s}\right)\left(\dfrac{s^2}{-6t}\right)$

26. $\dfrac{a}{bc}\div\dfrac{b}{ac}$

27. $\dfrac{1+\dfrac{1}{c-1}}{1-\dfrac{1}{c-1}}$

28. $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$

29 - 48

29. $2x + 12x^3$ **30.** $5ab - 8abc$ **31.** $x^2 + 7x + 6$

32. $x^2 - x - 6$ **33.** $x^2 - 2x - 8$ **34.** $2x^2 + 7x - 4$

35. $9x^2 - 36$ **36.** $8x^2 + 10x + 3$ **37.** $6x^2 - 5x - 6$

38. $x^2 + 10x + 25$ **39.** $t^3 + 1$ **40.** $4t^2 - 9s^2$

41. $4t^2 - 12t + 9$ **42.** $x^3 - 27$ **43.** $x^3 + 3x^2 - x - 3$

44. $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ **45.** $x^3 + 3x^2 - x - x$ **46.** $x^3 - 2x^2 - 23x + 60$

47. $x^3 + 5x^2 - 2x - 24$ **48.**$x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

49 - 54

49. $\dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$ **50.** $\dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4}$ **51.** $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 9x + 8}$

52. $\dfrac{x^3 + 5x^2 + 6x}{x^2 - x - 12}$ **53.** $\dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x^2 - 9}$ **54.** $\dfrac{x}{x^2 + x - 2} - \dfrac{2}{x^2 - 5x + 4}$

55 - 60

55. $x^2 + 2x + 5$ **56.** $x^2 - 16x + 80$ **57.** $x^2 - 5x + 10$ **58.** $x^2 + 3x + 1$

59. $4x^2 + 4x - 2$ **60.** $3x^2 - 24x + 50$

Respuestas

1. $-3a^2bc$ **2.** $2x^3y^5$ **3.** $2x^2-10x$ **4.** $4x-3x^2$

5. $-8+6a$ **6.** $4-x$ **7.** $-x^2+6x+3$ **8.** $-3t^2+21t-22$

9. $12x^2+25x-7$ **10.** x^3+x^2-2x **11.** $4x^2-4x+1$ **12.** $9x^2+12x+4$

13. $30y^4+y^5-y^6$ **14.** $-15t^2-56t+31$ **15.** $2x^3-5x^2-x+1$ **16.** $x^4-2x^3-x^2+2x+1$

17. $1+4x$ **18.** $3-2/b$ **19.** $\dfrac{3x+7}{x^2+2x-15}$ **20.** $\dfrac{2x}{x^2-1}$

21. $\dfrac{u^2+3u+1}{u+1}$ **22.** $\dfrac{2b^2-3ab+4a^2}{a^2b^2}$ **23.** $\dfrac{x}{yz}$ **24.** $\dfrac{zx}{y}$

25. $\dfrac{rs}{3t}$ **26.** $\dfrac{a^2}{b^2}$ **27.** $\dfrac{c}{c-2}$ **28.** $\dfrac{3+2x}{2+x}$

29. $2x(1+6x^2)$ **30.** $ab(5-8c)$ **31.** $(x+6)(x+1)$

32. $(x-3)(x+2)$ **33.** $(x-4)(x+2)$ **34.** $(2x-1)(x+4)$

35. $9(x-2)(x+2)$ **36.** $(4x+3)(2x+1)$ **37.** $(3x+2)(2x-3)$

38. $(x+5)^2$ **39.** $(t+1)(t^2-t+1)$ **40.** $(2t-3s)(2t+3s)$

41. $(2t-3)^2$ **42.** $(x-3)(x^2+3x+9)$ **43.** $(x-3)(x^2+3x+9)$

44. $x(x+1)^2$ **45.** $(x-1)^2(x-2)$ **46.** $(x-1)(x+1)(x+3)$

47. $(x-3)(x+5)(x-4)$ **48.** $(x-2)(x+3)(x+4)$ **49.** $\dfrac{x+2}{x-2}$

50. $\dfrac{2x+1}{x+2}$ **51.** $\dfrac{x+1}{x-8}$ **52.** $\dfrac{x(x+2)}{x-4}$

53. $\dfrac{x-2}{x^2-9}$ **54.** $\dfrac{x^2-6x-4}{(x-1)(x+2)(x-4)}$ **55.** $(x+1)^2+4$

56. $(x-8)^2+16$ **57.** $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{15}{4}$ **58.** $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$

59. $(2x+1)^2-3$ **60.** $3(x-4)^2+2$